RAM Revista del Aficionado a la Meteorología
Nº 8 - Febrero del 2003

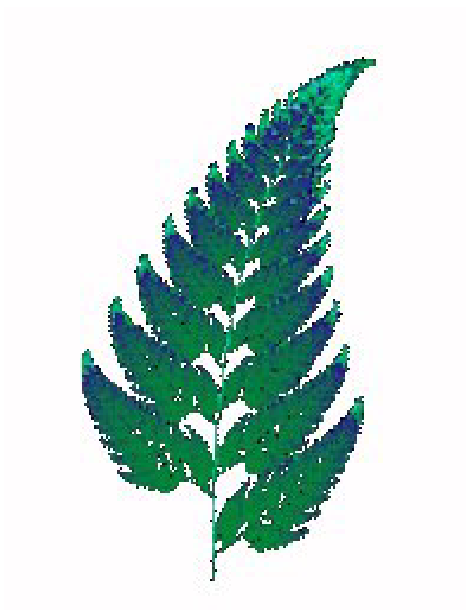
TEORIA DEL CAOS,
¿ES PREDECIBLE EL TIEMPO? (y II)
Fractales

Pepo Juega
Técnico de Sistemas, INM
pepo@inm.es

(Dedicado a Luis Vázquez)

FRACTALES

¿Qué es un fractal? La palabra está bien escogida. Un fractal es un diseño de estructura y complejidad infinitas. Patrones infinitos restringidos a un espacio finito. Una construcción geométrica cuya complejidad se mantiene al incrementar la escala de observación. Lejos de ser abstracciones esotéricas, los fractales están más cercanos de lo que parece. De hecho son los objetos no fractales los que constituyen una idealización abstracta y lejana a nuestra experiencia. Desde nuestra infancia nos han acostumbrado a adoptar categorías simplificadas para organizar nuestro mundo. Esto en el fondo es necesario pues sin las simplificaciones no cabría entendimiento ni diálogo. En la vida diaria manejamos constantemente "mentirijillas" para abarcar el enorme detalle presente en el mundo. Nuestra mente es incapaz de absorber todo el detalle presente en una flor, nuestro lenguaje es incapaz de describir los manejos de la mente, las abstracciones simplifican el lenguaje.



Fractal IFS (Iteration Formula System)

Una característica típica de los fractales es el poder acercarse y ver cada vez más detalle. Utilizar un microscopio de creciente potencia que desvele las tramas repetitivas. Atomos que se convierten en universos.

Veamos un ejemplo natural de este efecto. Benoit Mandekbrot nos propone la siguiente pregunta en su libro "La Geometría Fractal de la Naturaleza". ¿Cuánto mide la costa de Inglaterra?

Si recurrimos al modelo simplista de calcular la "costa" de un círculo de radio uno, sabemos resolver fácilmente la cuestión. La Geometría de la escuela primaria nos enseñó que esta era aproximadamente 6,28. Otro método de llegar al mismo resultado por aproximaciones sucesivas sería inscribir polígonos de cada vez más lados en el círculo, y acercarnos poco a poco al valor límite que es la circunferencia real.

Nº de Lados	3	4	8	16	32	64
Longitud de un lado	1,732	1,414	0,765	0,390	0,196	0,098
Perímetro	5,20	5,66	6,12	6,24	6,27	6,28

La tabla nos muestra los valores sucesivos de crecientes perímetros de polígonos inscritos en un círculo de radio unidad.

Vamos a emplear el mismo método para calcular la longitud de la costa de España con un patrón de longitudes de 300 Kms. primero, y de 50 Kms después. Si continuáramos reduciendo el patrón sucesivamente notaríamos que el valor de la costa crece sin fin. Nunca alcanza un límite. La diferencia entre esta costa real y la curva abstracta es que la costa de España es una curva con las características de un fractal.

Curvas de características similares llegan a plantear el problema de establecer su dimensión en el sentido clásico de la palabra. En este sentido toda curva por muy intrincada e irregular que fuera se consideraba de dimensión 1. Bajo la nueva óptica fractal la dimensión de ciertas curvas puede adquirir el valor de una fracción no entera. Este valor será una medida de su irregularidad a cualquier escala. Nos indicará la medida de crecimiento de su perímetro en función de la escala de magnitud en que medimos. De hecho podemos encontrar curvas, como el atractor extraño de Lorenz, que en su densa complejidad llegan a cubrir completamente una superficie, o expresado de otra forma su dimensión se aproxima, alcanza y supera el valor 2.

Podemos encontrar ejemplos de estos monstruos en la matemática clásica, como el triángulo de Sierpinsky, el polvo de Cantor o las curvas de Koch o de Peano. Más recientemente se han podido visualizar gracias al ordenador estas estructuras y Benoit Mandelbrot bautizó con su nombre a la estructura más compleja y bella de esta categoría, el conjunto de Mandelbrot, que constituye un universo ilimitado por el que podemos viajar con la ayuda de un ordenador personal de sobremesa, explorando sus rincones con una certeza casi absoluta de ser los primeros visitantes de la zona escogida.

La fórmula generadora de este conjunto es bien simple:

$$\mathbf{Z_{(n+1)} = Z_n^2 + c}$$

Su simpleza es engañosa. Nos sirve para deducir si un punto del plano complejo pertenece o no al conjunto de Mandelbrot. La evoluciones ocurren en el plano complejo centrado en el origen 0 + 0i y limitado por el círculo de radio 2. El algoritmo de pertenencia o no al conjunto se resuelve al iterar la fórmula para cada punto del plano. Si tras un número razonable de iteraciones (con 100 nos bastan) comprobamos que la órbita no escapa del círculo de radio 2, podemos asignar el punto inicial al conjunto de Mandelbrot. ¿Como se calculan las órbitas?. Para cada punto del plano complejo, c = a + bi, limitado por los valores +2 y -2 realizamos las siguientes series.

$$\begin{gathered} \mathbf{Z_0 = 0 + 0i} \\ \mathbf{Z_1 = Z_0^2 + c} \\ \mathbf{....} \\ \mathbf{Z_{(n+1)} = Z_n^2 + c} \end{gathered}$$

series que van definiendo puntos del plano que agrupados, constituyen la órbita o evolución iterativa del punto inicial.

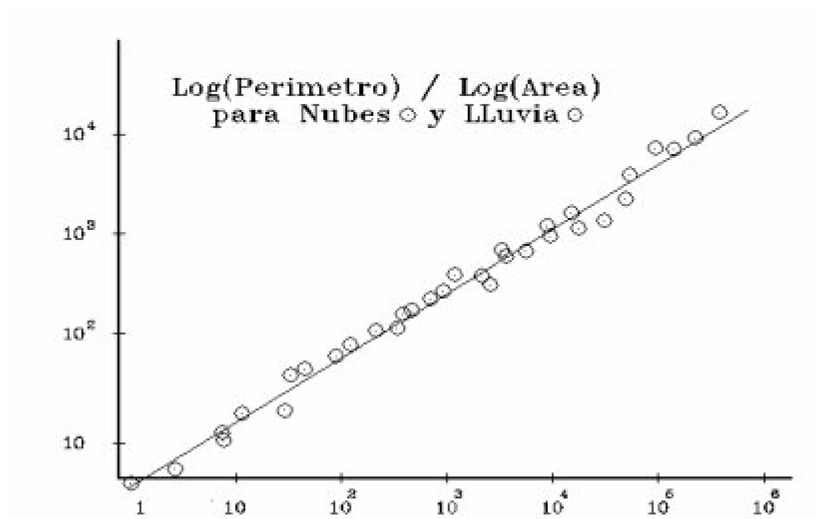
La precisión numérica alcanzable hoy en los ordenadores personales caseros, nos permiten el manejo de cifras decimales en rangos que abarcan desde la unidad hasta un orden de billonésimas partes de la unidad. Con esta limitación, vamos a intentar calcular la escala alcanzable en los mapas del conjunto de Mandelbrot que podemos explorar. La pantalla de un ordenador personal medio viene a medir un cuarto de metro, 25cms. La porción del plano complejo a explorar está limitada por los valores +2 y -2, una longitud total de 4 unidades. Un programa elemental, como el incluido en el anexo, es capaz de realizar un zoom de esta porción del plano de forma que el círculo de radio 2 que antes se visualizaba completo en la pantalla del ordenador, tenga una extensión de... ¿Se atreve a intentar adivinarlo?.

Si aventuramos como respuesta el tamaño de un campo de fútbol, seguramente alguien dirá que para eso no merece la pena hacer el cálculo. Si nos decidimos por un círculo de radio 5 Kms. podemos deducir que en efecto, los pequeños parches posibles de 25 cms. de lado que podemos explorar en un círculo de 5 kms. de radio serían nada menos que 1.600 millones!. Pero no, aún no hemos alcanzado nuestro límite de exploración. La respuesta correcta es... El conjunto de Mandelbrot ampliado por un ordenador casero puede llegar a ser tan grande como la órbita de Júpiter, un billón y medio de kilómetros de ancho, como diez veces la distancia de la tierra al Sol. ¿Cuales son las probabilidades de que la zona escogida por nosotros no haya sido nunca visitada?. De hecho no solo son elevadas, son casi absolutas.

El Profesor Michael Fielding Barnsley imparte un curso en la 'School of Mathematics' del Instituto de Tecnología de Atlanta llamado -Geometría Fractal- , y ya lo advierte en la introducción:

"La Geometría Fractal les hará ver las cosas de modo diferente. Existe un riesgo si continúan leyendo. Se juegan la pérdida de su visión de la infancia de las nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, rocas, montañas, torrentes de agua, ladrillos y muchas otras cosas. Nunca más su interpretación de estos objetos será la misma" ... "...La esencia de este texto reside en como utilizar la geometría fractal para modelizar objetos reales del mundo físico. Más que dedicarse a los aspectos aleatorios en la generación de un fractal, la intención es comenzar con un objeto natural y buscar el fractal específico que mejor lo simule.", y a continuación enumera los desarrollos en aplicaciones biológicas, fisiológicas, geografía, medición de costas, estudios de turbulencia, formación de espuma, plumas, imágenes de ordenador y gráficos por ordenador, haciendo mención del desarrollo en compresión de imágenes digitales para su tele-transmisión y reconstrucción.

En el campo de las aplicaciones puramente meteorológicas, Lovejoy ha publicado un par de estudios confirmando la sospecha de la posibilidad de modelizar nubes mediante fractales. Pocos gráficos de los comúnmente manejados en Meteorología resultan tan 'rectos' como la figura XI en la que se muestran relaciones Area-Perímetro de nubes y zonas de precipitación. Los datos provienen de observaciones Radar en zonas Atlánticas tropicales con precipitaciones superiores a los 2 mm./hora, y de la banda infrarroja de satélites geoestacionarios sobre el Océano Indico con lecturas inferiores a los -10º . Las áreas oscilan entre uno y un millón de Kilómetros cuadrados. La dimensión del perímetro, ajustada en un rango de seis órdenes de magnitud es 4/3.



Para terminar, les propongo un ligero ejercicio teórico. Consideremos la siguiente conclusión: "La vida es un fractal en el espacio de Hilbert".

Los matemáticos utilizan el espacio de Hilbert cuando quieren desenvolverse en un espacio de dimensiones infinitas. Si consideramos cada encrucijada de nuestra vida con una fuente de infinitas posibilidades en cuanto a su desarrollo, estaremos definiendo un fractal en el que cuanto más nos aproximamos al detalle, más riqueza descubriremos. Si identificamos cada línea posible de desarrollo con una dimensión, tiene sentido el hablar del fractal de nuestras vidas en el espacio de Hilbert. Visto desde fuera, esto se convierte en una aproximación interesante sobre lo que es la vida en sí. Un proceso mental en el que el hardware es solo accidental. Lo que cuenta realmente es el tinglado maravillosamente complicado del enorme fractal que nuestros softwares consiguen en su totalidad interdependiente.

Bibliografía

-Deterministic Nonperiodic Flow - Edward Lorenz. Journal of the Atmospheric Sciences. Vol.20. Pág.130

-CHAOS – James Gleick. - 1987 -Serie "Chaos Reigns" - Diversos autores. Revista New Scientist Oct.1989 - Sept.1990.

-The fractal geometry of Nature. Benoit Mandelbrot. – 1982

-A random walk through Fractal Dimensions. Brian H. Kaye – 1989.

-Sur l'iteration des fonctions rationnelles. Gastón Julia.
Journal deMath. Pure etAppl. 8 (1918) Págs.47-245 .

-Fractal properties of rain, and a fractal model. S. Lovejoy & B. Mandelbrot. Tellus 37A(1985) Págs.209-232 .

-Mind Tools. Rudy Rucker - 1987 .

-Fractals Everywhere. M. Barnsley - 1988 .

-Exploring the geometry of nature. Edward Rietman. – 1989.

ram@meteored.com